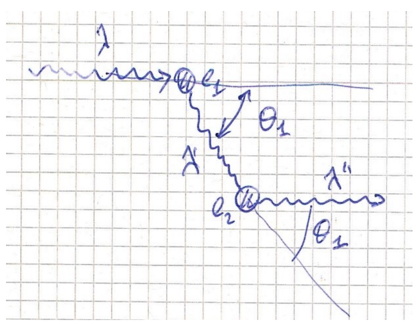
Physique générale : quantique, Corrigé 5

Assistants et tuteurs :

elena.acinapura@epfl.ch
sara.alvesdossantos@epfl.ch
felice.bordereau@epfl.ch
jeanne.bourgeois@epfl.ch
sofia.brizigotti@epfl.ch
thomas.chetaille@epfl.ch
marco.dimambro@epfl.ch
leo.goutte@epfl.ch
douaa.salah@epfl.ch
arianna.vigano@epfl.ch

Exercice 1 : Double diffusion Compton

1. A partir du dessin des deux collisions, il est évident que les deux angles sont égaux : $\theta_1 = \theta_2$.



2. D'abord nous calculons la longueur d'onde initiale du photon $\lambda = \frac{hc}{E} = 15.5$ pm.
3. Il faut utiliser la formule de Compton $\lambda' - \lambda = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\theta_1}{2}$ et $\lambda'' - \lambda' = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\theta_2}{2}$. Si on divise la première expression par la deuxième à cause des angles égaux, on trouve :

$$\lambda' - \lambda = \lambda'' - \lambda' \longleftrightarrow \lambda'' = 2\lambda' - \lambda$$

On sait aussi que l'énergie cinétique du premier électron après collision est 1.5 fois plus grande que l'énergie cinétique du deuxième électron après collusion.

$$E_1^{cin} = 1.5E_2^{cin}$$

A cause de la conservation de l'énergie, les énergies cinétiques sont égales à la différence d'énergie du photon avant et après collision.

$$E_1^{cin} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$$

et

$$E_2^{cin} = \frac{hc}{\lambda'} - \frac{hc}{\lambda''}$$

Donc

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} = 1.5(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda''})$$
$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} = 1.5\frac{\lambda'' - \lambda'}{\lambda'\lambda''}$$

Grâce à la formule $\lambda' - \lambda = \lambda'' - \lambda'$ plus haut, nous trouvons :

$$\lambda'' = 1.5\lambda = 23.3\text{pm et aussi } \lambda' = 1.25\lambda = 19.4\text{pm}.$$

Une autre possibilité de faire le calcul est la suivante :
Posons $\frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\theta_1}{2} = a$; nous avons $\lambda' = \lambda + a$, $\lambda'' = \lambda + 2a$ parce que $\theta_1 = -\theta_2$, selon les conditions du problème. L'énergie du photon vaut $E_{ph} = \frac{hc}{\lambda}$, donc pour un premier électron diffusé nous avons $E_{el,1} = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda+a} = hc\frac{a}{\lambda(\lambda+a)}$, et pour le deuxième $E_{el,1} = \frac{hc}{\lambda+a} - \frac{hc}{\lambda+2a} = hc\frac{a}{(\lambda+a)(\lambda+2a)}$.
Selon les données du problème, $hc\frac{a}{(\lambda+a)} = 1.5hc\frac{a}{(\lambda+a)(\lambda+2a)}$ donc $\frac{1}{\lambda} = \frac{1.5}{\lambda+2a}$ et $a = 0.25\lambda = 3.9\cdot10^{-12}$m. Donc $\sin^2\frac{\theta_1}{2} = \frac{amc}{2h} = 0.8$ et $\theta_1 = 127°$.
Nous avons aussi $\lambda' = \lambda + a = 19.4$pm, $\lambda' = \lambda + 2a = 23.3$pm, $E_{el,1} = 2.25\cdot10^{-15}$J $= 16$ keV, $E_{el,2} = 1.71\cdot10^{-15}$J $= 10.7$ keV.
Ce problème a aussi une solution "triviale" : lorsque $\theta_1 = \theta_2 = 0$, $a = 0$, $E_{el,1} = E_{el,2} = 0$.

Exercice 2 : La dispersion du photon et d'une particule avec masse

1. Sachant que $E = hf$, $p = \frac{h}{\lambda}$ et $mc = \frac{h}{\lambda_C}$, $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ peut se réécrire $h^2f^2 = \frac{h^2c^2}{\lambda^2} + \frac{h^2c^2}{\lambda_C^2}$, ce qui donne :
$$(\frac{f}{c})^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda_C^2}. \tag{1}$$
2. Pour un photon, on a $\frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda}$. Le 3e terme $\frac{1}{\lambda_C}$ de l'équation 1 valable pour les électrons et d'autres particules massives montre qu'ils auront toujours une fréquence différente que des photons à la même longueur d'onde.

Exercice 3 : L'étudiant quantique

1. La longueur d'onde de l'étudiant est $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$. Soit w la largeur de la porte de diffraction. Il faut alors que $w \leq 10.0\lambda = 10.0\frac{h}{mv}$, ce qui donne :
$$v \leq 10.0\frac{h}{mw} = 10.0(\frac{6.626\cdot10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}}{(80.0\text{ kg})(0.750\text{ m})}) = 1.10\cdot10^{-34}\text{m/s}$$
2. Sachant que $t = \frac{d}{v}$, nous avons :
$$t \geq \frac{0.150\text{ m}}{1.10\cdot10^{-34}\text{ m/s}} = 1.36\cdot10^{33}\text{ s}$$

3. Le temps minimum nécessaire pour passer à travers la porte est supérieur à 10^{16} fois l'âge de l'univers, donc il n'est pas raisonnable de s'inquiéter.

Exercice 4 : Condensat de Bose-Einstein

1. La longueur d'onde de de Broglie pour une particule de masse m et vitesse v est définie comme étant $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$.

   En utilisant l'expression de l'énergie cinétique $E = \frac{p^2}{2m}$, on peut exprimer la quantité de mouvement moyenne à l'aide du principe d'équipartition de l'énergie :

   $$< p^2 >= 2m < E >= 2m\frac{3}{2}k_BT = 3mk_BT.$$

   On a donc

   $$\lambda_{th} = \frac{h}{\sqrt{< p^2 >}} = \sqrt{\frac{h^2}{3mk_BT}}$$

   Par convention on utilise plutôt la définition $\lambda_{th} = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi mk_BT}}$ car le facteur $\sqrt{2\pi}$ se simplifie souvent dans les calculs où λ_{th} est utilisé.

2. Pour un gaz de densité $n = \frac{N}{V}$, le volume occupé par une particule est $v = \frac{1}{n}$. On pose donc

   $$\frac{1}{n} \simeq \lambda_{th}^3 = (\frac{h^2}{2\pi mk_BT_C})^{3/2}$$

   On inverse cette relation et on trouve :

   $$T_C \simeq \frac{n^{2/3}h^2}{2\pi mk_B}$$

3. On part de $PV = Nk_BT$. On a $P = nk_BT$. Pour l'air à la température critique T_C, on utilise cette expression pour trouver n en fonction de P et T_C :

   $$n = \frac{P}{k_BT_C}$$

   On remplace dans l'expression pour T_C :

   $$\begin{aligned} k_BT_C &= \frac{p^{2/3}}{(k_BT_C)^{2/3}}\frac{h^2}{2\pi m} \\ (k_BT_C)^{5/3} &= p^{2/3}\frac{h^2}{2\pi m} \\ k_BT_C &= p^{2/5}(\frac{h^2}{2\pi m})^{3/5} \end{aligned}$$

En utilisant

$$\begin{aligned} P &= 10^5 \text{ N/m}^2 \\ h &\simeq 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ k_B &\simeq 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2\text{kg S}^{-2}\text{K}^{-1} \\ m_{N_2} &= \frac{0.028\text{kg}}{N_{Avogadro}} = \frac{0.028}{6.02 \cdot 10^{23}} \text{ kg} \end{aligned}$$

On obtient apès calcul $T_C \simeq 0.58$ Kelvin.

4. Même calcul pour le ^{87}Rb. La masse est $m_{Rb} \simeq 85.5$ a.u. $\simeq 85.5 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg. En utilisant $n = 2.5 \cdot 10^{18}$ atomes/m^2, on a :

$$T_C \simeq \frac{n^{2/3}h^2}{2\pi m_{Rb} k_B} \simeq 65 \cdot 10^{-9} \text{ K} = 65 \text{ nK}$$

La vraie température critique du Rubidium a été mesurée à environ 100 nK.

Exercice 5 : Expérience de Young avec fullerènes

1. La surface de la sphère est : $S = 4\pi \times r^2$.
Elle doit être couverte uniformément par les atomes, qui occupent une surface de 1 nm^2.
Donc on a :

$$\begin{aligned} 4\pi \times r^2 &= n \times 1 \;\; \text{nm}^2 \\ r &= \sqrt{\frac{n}{4\pi}} \;\; \text{nm} \end{aligned}$$

2. Calculons la longueur d'onde de Broglie de la molécule :

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.6 \times 10^{-34} kg \times m^2/s}{m \times 1 m/s}$$

Le carbone pèse 12 unités atomiques, soit $12 \times 1.66 \times 10^{-27} kg \simeq 2 \times 10^{-26} kg$.
Donc,

$$\lambda = \frac{6.6 \times 10^{-34} kg \times m}{n \times 2 \times 10^{-26} kg} \simeq \frac{3.3 \times 10^{-8} m}{n} = \frac{33}{n} \text{ nm}$$

On demande que $d << \frac{33}{n} \times 10$ nm $= \frac{330}{n}$ nm.
En même temps, pour que la molécule passe à travers les fentes, il faut que $d \geq 2r$.

Posons $d = \frac{330}{n}$ nm, qui est la plus grande fente admise. On a :

$$\frac{330}{n} \geq \sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

d'où :

$$\sqrt{n^3} \leq 330\sqrt{\pi}$$
$$n \leq (330 \times \sqrt{\pi})^{\frac{2}{3}} \simeq 70$$

Donc on arriverait tout juste à effectuer l'expérience avec le fullerène le plus commun, pour lequel n = 64.

Exercice 6 : Question de type examen

4. Il faut utiliser la loi de la diffusion Compton, qui décrit correctement la diffusion d'un photon sur un objet massif. Avant la collision, la quantité de mouvement totale est $p = \frac{h}{\lambda}$. Le photon réfléchit aura une longueur d'onde $\lambda^{'} = \lambda + 2\frac{h}{mc}$. La quantité de mouvement totale après la collision est alors : $p^{'} = mv - \frac{h}{\lambda'} = p = \frac{h}{\lambda}$. Donc, on a

$$mv = h\frac{\lambda + \lambda'}{\lambda\lambda'} = \frac{2h}{\lambda}\frac{\lambda mc + h}{\lambda mc + 2h} = \frac{2h}{\lambda}\left(1 - \frac{h}{\lambda mc + 2h}\right) \tag{2}$$

Par conséquent, la vitesse est un peu moins que $\frac{2h}{m\lambda}$.